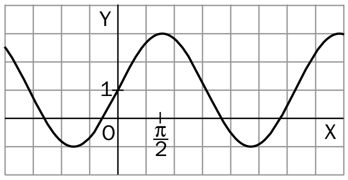
Funciones periódicas

1. Halla el valor de x en cada una de las siguientes expresiones, teniendo en cuenta que en los dos primeros apartados x es un ángulo del primer cuadrante:

a) $\operatorname{sen} 2x = 0{,}5$ b) $3\cos x = 2$ c) $5 \operatorname{tg} (43° \, 34') = x$ d) $\cos 0{,}75 \text{ rad} = \frac{x}{4}$

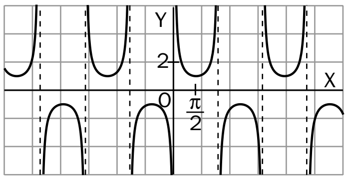
2. Escribe la expresión algebraica de la función trigonométrica cuya gráfica es:



3. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |\cos x|$ e indica:

a) El dominio.
b) El recorrido.
c) El período.
d) Si es o no es simétrica, y señala en caso afirmativo el tipo de simetría.
e) Los puntos en los que corta los ejes coordenados en el intervalo $[0, \pi]$.
f) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento en $[0, \pi]$.

4. A partir de la gráfica de la función $y = \operatorname{cosec} x$, señala:



a) Los puntos en los que no está definida.
b) El período.
c) El tipo de simetría.
d) Los puntos en los que la gráfica corta los ejes coordenados.

5. Indica el período de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$ b) $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

6. Dos lados de un paralelogramo miden 8 y 5 centímetros respectivamente. Escribe la función que indica el área de este paralelogramo en función del ángulo que forman sus lados.

7. El regulador de la calefacción de una casa está programado durante el invierno de modo que su consumo, en kW/h a lo largo del día, viene dado por la función: $c(t) = 1 + \cos \frac{\pi(t-3)}{12}$, donde t indica la hora, siendo la «hora cero» la medianoche.

a) ¿Cuál es el consumo a las 7 de la mañana? ¿Y a las 2 de la tarde?
b) ¿En qué momento del día se consume más?
c) ¿Hay algún momento en el que el aparato se apague?
d) ¿Cuál es el período de la función c(t)?

SOLUCIONES

1. Para resolver los tres primeros apartados, la calculadora debe estar en modo DEG; sin embargo, en el último apartado será necesario el modo RAD. En los dos primeros hay que utilizar la función recíproca.

a) $2x = 30° \Rightarrow x = 15°$

b) $\cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 48° \; 11' \; 23''$

c) $x = 5 \cdot 0{,}95 = 4{,}76$

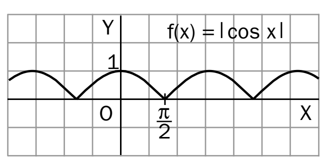
d) $\frac{x}{4} = 0{,}73 \Rightarrow x = 2{,}92$

---

2. $y = 2 \operatorname{sen}(x) + 1$

---

3. a) $D(f) = R$



b) $f(D) = [0, 1]$

c) Período: π

d) $f(x) = |\cos x| =$
$= |\cos(-x)| =$
$f(-x)$, por tanto es una función par.

e) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$.

f) Es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, y creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

---

4. a) La función no está definida para $x = k\pi$, siendo k un número entero. Nótese que $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, y que en estos puntos $\operatorname{sen} x = 0$.

b) Período: 2π.

c) Se trata de una función impar.

d) La gráfica nunca corta los ejes coordenados.

---

5. a)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen}^2 x$	0	1	0	1	0

Parece que el período es π. Se comprueba aplicando la definición:
$\operatorname{sen}^2(x + \pi) = [\operatorname{sen}(x + \pi)]^2 = (-\operatorname{sen} x)^2 =$
$= \operatorname{sen}^2 x$
Además, el período no puede ser inferior a π, pues la función tendría que anularse en $(0, \pi)$, y esto no sucede. En resumen, $T = \pi$.

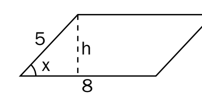
b)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{sen} x \cdot \cos x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Parece que el período es π. Se comprueba aplicando la definición:
$\operatorname{sen}(x + \pi) \cdot \cos(x + \pi) = (-\operatorname{sen} x)(-\cos x) =$
$= \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
Además, el período no puede ser inferior a π, pues la función tendría que anularse en $(0, \pi)$, y esto no sucede, luego $T = \pi$.

---

6. Sea x el ángulo que forman los lados y sea h la altura en cm.



$h = 5 \operatorname{sen} x$ cm

$\text{Área}(x) = 8 \cdot 5 \operatorname{sen} x \text{ cm}^2 = 40 \operatorname{sen} x \text{ cm}^2$

---

7. a) $c(7) = 1 + \cos \frac{4\pi}{12}$ kW/h $= 1{,}5$ kW/h

$c(14) = 1 + \cos \frac{11\pi}{12}$ kW/h $= 0{,}03$ kW/h

b) El consumo es máximo cuando $\cos \frac{\pi(t-3)}{12} = 1$

$\cos \frac{\pi(t-3)}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi(t-3)}{12} = 2k\pi, k \in Z \Leftrightarrow$
$t - 3 = 24k, k \in Z \Leftrightarrow t = 3 + 24k, k \in Z$
Como t es una hora del día debe pertenecer al intervalo $[0, 24]$, luego $k = 0$.

Solución: A las 3 de la mañana.

c) El aparato se apaga si $c(t) = 0$.

$c(t) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi(t-3)}{12} = -1 \Leftrightarrow$

$\frac{\pi(t-3)}{12} = \pi + 2k\pi$, k entero $=$

$= \pi(2k + 1)$, k entero $\Leftrightarrow t - 3 = 24k + 12 \Leftrightarrow$
$t = 15 + 24k$, k entero.

Solución: El regulador se apaga a las 3 de la tarde.

d) $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$

c(t) tiene un período de 24 horas.